
Lothar Papula

Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2

Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das
Grundstudium

14., überarbeitete und erweiterte Auflage

Mit 345 Abbildungen, 300 Beispielen aus
Naturwissenschaft und Technik sowie 324
Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen



Springer Vieweg

Inhaltsverzeichnis

I Lineare Algebra	1
1 Vektoren	1
2 Reelle Matrizen	5
2.1 Ein einführendes Beispiel	5
2.2 Definition einer reellen Matrix	6
2.3 Transponierte einer Matrix	10
2.4 Spezielle quadratische Matrizen	11
2.4.1 Diagonalmatrix	11
2.4.2 Einheitsmatrix	12
2.4.3 Dreiecksmatrix	12
2.4.4 Symmetrische Matrix	13
2.4.5 Schiefsymmetrische Matrix	14
2.5 Gleichheit von Matrizen	15
2.6 Rechenoperationen für Matrizen	15
2.6.1 Addition und Subtraktion von Matrizen	16
2.6.2 Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar	17
2.6.3 Multiplikation von Matrizen	18
3 Determinanten	23
3.1 Ein einführendes Beispiel	23
3.2 Zweireihige Determinanten	25
3.2.1 Definition einer zweireihigen Determinante	25
3.2.2 Eigenschaften zweireihiger Determinanten	26
3.3 Dreireihige Determinanten	33
3.3.1 Definition einer dreireihigen Determinante	33
3.3.2 Entwicklung einer dreireihigen Determinante nach Unterdeterminanten (Laplacescher Entwicklungssatz)	37
3.4 Determinanten höherer Ordnung	41
3.4.1 Definition einer n -reihigen Determinante	41
3.4.2 Laplacescher Entwicklungssatz	45
3.4.3 Rechenregeln für n -reihige Determinanten	47
3.4.4 Regeln zur praktischen Berechnung einer n -reihigen Determinante ..	50
4 Ergänzungen	54
4.1 Reguläre Matrix	54
4.2 Inverse Matrix	55
4.3 Orthogonale Matrix	58
4.4 Rang einer Matrix	63

5 Lineare Gleichungssysteme	69
5.1 Allgemeine Vorbetrachtungen	69
5.2 Gaußscher Algorithmus	72
5.3 Lösungsverhalten eines linearen (m, n) -Gleichungssystems	76
5.4 Lösungsverhalten eines quadratischen linearen Gleichungssystems	83
5.4.1 Inhomogenes lineares (n, n) -System	83
5.4.2 Homogenes lineares (n, n) -System	87
5.4.3 Cramersche Regel	90
5.5 Berechnung einer inversen Matrix nach dem Gaußschen Algorithmus (Gauß-Jordan-Verfahren)	93
5.6 Lineare Unabhängigkeit von Vektoren	95
5.6.1 Ein einführendes Beispiel	95
5.6.2 Linear unabhängige bzw. linear abhängige Vektoren	97
5.6.3 Kriterien für die lineare Unabhängigkeit von Vektoren	99
5.7 Ein Anwendungsbeispiel: Berechnung eines elektrischen Netzwerkes	104
6 Komplexe Matrizen	105
6.1 Ein einführendes Beispiel	106
6.2 Definition einer komplexen Matrix	107
6.3 Rechenoperationen und Rechenregeln für komplexe Matrizen	108
6.4 Konjugiert komplexe Matrix, konjugiert transponierte Matrix	110
6.5 Spezielle komplexe Matrizen	113
6.5.1 Hermitesche Matrix	113
6.5.2 Schiefhermitesche Matrix	116
6.5.3 Unitäre Matrix	118
7 Eigenwerte und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix	120
7.1 Ein einführendes Beispiel	120
7.2 Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix	125
7.3 Eigenwerte und Eigenvektoren einer n -reihigen Matrix	132
7.4 Eigenwerte und Eigenvektoren spezieller Matrizen	138
7.4.1 Eigenwerte und Eigenvektoren einer Diagonal- bzw. Dreiecksmatrix	138
7.4.2 Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix	140
7.4.3 Eigenwerte und Eigenvektoren einer hermiteschen Matrix	142
7.5 Ein Anwendungsbeispiel: Normalschwingungen gekoppelter mechanischer Systeme	144
Übungsaufgaben	146
Zu Abschnitt 1	146
Zu Abschnitt 2	147
Zu Abschnitt 3	148
Zu Abschnitt 4	151
Zu Abschnitt 5	154
Zu Abschnitt 6	158
Zu Abschnitt 7	160

II Fourier-Reihen	163
1 Fourier-Reihe einer periodischen Funktion	163
1.1 Einleitung	163
1.2 Entwicklung einer periodischen Funktion in eine Fourier-Reihe	165
1.3 Komplexe Darstellung der Fourier-Reihe	174
1.4 Übergang von der komplexen zur reellen Darstellungsform	178
2 Anwendungen	182
2.1 Fourier-Zerlegung einer Schwingung (harmonische Analyse)	182
2.2 Zusammenstellung wichtiger Fourier-Reihen (Tabelle)	186
2.3 Ein Anwendungsbeispiel: Fourier-Zerlegung einer Kippspannung	187
Übungsaufgaben	190
Zu Abschnitt 1	190
Zu Abschnitt 2	192
III Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen	194
1 Funktionen von mehreren Variablen	194
1.1 Definition einer Funktion von mehreren Variablen	194
1.2 Darstellungsformen einer Funktion	197
1.2.1 Analytische Darstellung	197
1.2.2 Darstellung durch eine Funktionstabelle (Funktionstafel)	198
1.2.3 Graphische Darstellung	200
1.2.3.1 Darstellung einer Funktion als Fläche im Raum	200
1.2.3.2 Schnittkurvendiagramme	204
1.3 Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion	209
2 Partielle Differentiation	213
2.1 Partielle Ableitungen 1. Ordnung	213
2.2 Partielle Ableitungen höherer Ordnung	222
2.3 Differentiation nach einem Parameter (verallgemeinerte Kettenregel)	227
2.4 Das totale oder vollständige Differential einer Funktion	232
2.4.1 Geometrische Betrachtungen	232
2.4.2 Definition des totalen oder vollständigen Differentials	234
2.5 Anwendungen	238
2.5.1 Implizite Differentiation	238
2.5.2 Linearisierung einer Funktion	242
2.5.3 Relative oder lokale Extremwerte	245
2.5.4 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen	252
2.5.5 Lineare Fehlerfortpflanzung	259

3 Mehrfachintegrale	266
3.1 Doppelintegrale	266
3.1.1 Definition und geometrische Deutung eines Doppelintegrals	266
3.1.2 Berechnung eines Doppelintegrals	269
3.1.2.1 Doppelintegral in kartesischen Koordinaten	269
3.1.2.2 Doppelintegral in Polarkoordinaten	277
3.1.3 Anwendungen	282
3.1.3.1 Flächeninhalt	283
3.1.3.2 Schwerpunkt einer homogenen Fläche	289
3.1.3.3 Flächenmomente (Flächenträgheitsmomente)	295
3.2 Dreifachintegrale	301
3.2.1 Definition eines Dreifachintegrals	301
3.2.2 Berechnung eines Dreifachintegrals	303
3.2.2.1 Dreifachintegral in kartesischen Koordinaten	303
3.2.2.2 Dreifachintegral in Zylinderkoordinaten	307
3.2.3 Anwendungen	312
3.2.3.1 Volumen und Masse eines Körpers	312
3.2.3.2 Schwerpunkt eines homogenen Körpers	320
3.2.3.3 Massenträgheitsmomente	326
Übungsaufgaben	332
Zu Abschnitt 1	332
Zu Abschnitt 2	332
Zu Abschnitt 3	338
IV Gewöhnliche Differentialgleichungen	343
1 Grundbegriffe	343
1.1 Ein einführendes Beispiel	343
1.2 Definition einer gewöhnlichen Differentialgleichung	345
1.3 Lösungen einer Differentialgleichung	345
1.4 Modellmäßige Beschreibung naturwissenschaftlich-technischer Problemstellungen durch Differentialgleichungen	348
1.5 Anfangswert- und Randwertprobleme	351
2 Differentialgleichungen 1. Ordnung	355
2.1 Geometrische Betrachtungen	355
2.2 Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen	358
2.3 Integration einer Differentialgleichung durch Substitution	362
2.4 Exakte Differentialgleichungen	365
2.5 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	370
2.5.1 Definition einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung	370
2.5.2 Integration der homogenen linearen Differentialgleichung	371
2.5.3 Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung	373
2.5.3.1 Variation der Konstanten	373
2.5.3.2 Aufsuchen einer partikulären Lösung	377

2.6	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . .	380
2.7	Anwendungsbeispiele	384
2.7.1	Radioaktiver Zerfall	384
2.7.2	Freier Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes	385
2.7.3	Wechselstromkreis	388
3	Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . .	392
3.1	Definition einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	392
3.2	Allgemeine Eigenschaften der homogenen linearen Differentialgleichung . .	393
3.3	Integration der homogenen linearen Differentialgleichung	400
3.4	Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung	407
4	Anwendungen in der Schwingungslehre	417
4.1	Mechanische Schwingungen	417
4.1.1	Allgemeine Schwingungsgleichung der Mechanik	417
4.1.2	Freie ungedämpfte Schwingung	420
4.1.3	Freie gedämpfte Schwingung	424
4.1.3.1	Schwache Dämpfung (Schwingungsfall)	424
4.1.3.2	Starke Dämpfung (aperiodisches Verhalten, Kriechfall)	427
4.1.3.3	Aperiodischer Grenzfall	431
4.1.3.4	Zusammenfassung	434
4.1.4	Erzwungene Schwingung	435
4.2	Elektrische Schwingungen	445
4.2.1	Schwingungsgleichung eines elektrischen Reihenschwingkreises	445
4.2.2	Freie elektrische Schwingung	448
4.2.3	Erzwungene elektrische Schwingung	451
5	Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	455
5.1	Definition einer linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	455
5.2	Integration der homogenen linearen Differentialgleichung	456
5.3	Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung	463
5.4	Ein Eigenwertproblem: Bestimmung der Eulerschen Knicklast	469
6	Numerische Integration einer Differentialgleichung	473
6.1	Numerische Integration einer Differentialgleichung 1. Ordnung	474
6.1.1	Streckenzugverfahren von Euler	474
6.1.2	Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung	478
6.2	Numerische Integration einer Differentialgleichung 2. Ordnung nach dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung	484
7	Systeme linearer Differentialgleichungen	488
7.1	Systeme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	488
7.1.1	Ein einführendes Beispiel	488
7.1.2	Grundbegriffe	489

7.1.3	Integration des homogenen linearen Differentialgleichungssystems . . .	492
7.1.4	Integration des inhomogenen linearen Differentialgleichungssystems ..	497
7.1.4.1	Aufsuchen einer partikulären Lösung	497
7.1.4.2	Einsetzungs- oder Eliminationsverfahren	503
7.1.5	Ein Anwendungsbeispiel: Kettenleiter	512
7.2	Systeme linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	516
Übungsaufgaben		522
Zu Abschnitt 1	522
Zu Abschnitt 2	523
Zu Abschnitt 3	529
Zu Abschnitt 4	531
Zu Abschnitt 5	534
Zu Abschnitt 6	538
Zu Abschnitt 7	539
V Fourier-Transformationen		542
1 Grundbegriffe		542
1.1	Einleitung	542
1.2	Definition der Fourier-Transformierten einer Funktion	547
1.3	Inverse Fourier-Transformation	552
1.4	Äquivalente Fourier-Darstellung in reeller Form	554
2 Spezielle Fourier-Transformationen		555
2.1	Fourier-Kosinus-Transformation	555
2.2	Fourier-Sinus-Transformation	557
2.3	Zusammenhang zwischen den Fourier-Transformationen $F(\omega)$, $F_c(\omega)$ und $F_s(\omega)$	559
3 Wichtige „Hilfsfunktionen“ in den Anwendungen		561
3.1	Sprungfunktionen	561
3.2	Rechteckige Impulse	564
3.3	Diracsche Deltafunktion (Impulsfunktion)	565
3.4	Zusammenhang zwischen der Sprungfunktion und der Diracschen Deltafunktion	570
4 Eigenschaften der Fourier-Transformation (Transformationsätze)		573
4.1	Linearitätssatz (Satz über Linearkombinationen)	573
4.2	Ähnlichkeitssatz	575
4.3	Verschiebungssatz (Zeitverschiebungssatz)	576
4.4	Dämpfungssatz (Frequenzverschiebungssatz)	579

4.5	Ableitungssätze (Differentiationssätze)	581
4.5.1	Ableitungssatz für die Originalfunktion	581
4.5.2	Ableitungssatz für die Bildfunktion	582
4.6	Integrationsatz für die Originalfunktion	585
4.7	Faltungssatz	586
4.8	Vertauschungssatz	590
4.9	Zusammenfassung der Rechenregeln (Transformationsätze)	593
4.10	Fourier-Transformation periodischer Funktionen (Sinus, Kosinus)	594
5	Rücktransformation aus dem Bildbereich in den Originalbereich	595
5.1	Allgemeine Hinweise zur Rücktransformation	595
5.2	Tabellen spezieller Fourier-Transformationen	598
	Tabelle 1: Exponentielle Fourier-Transformationen	598
	Tabelle 2: Fourier-Sinus-Transformationen	600
	Tabelle 3: Fourier-Kosinus-Transformationen	601
6	Anwendungen der Fourier-Transformation	602
6.1	Integration einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten	602
6.2	Beispiele aus Naturwissenschaft und Technik	604
6.2.1	Fourier-Analyse einer beidseitig gedämpften Kosinusschwingung (amplitudenmodulierte Kosinusschwingung)	604
6.2.2	Frequenzgang eines Übertragungssystems	606
Übungsaufgaben	610
	Zu Abschnitt 1	610
	Zu Abschnitt 2	611
	Zu Abschnitt 3	612
	Zu Abschnitt 4	614
	Zu Abschnitt 5	618
	Zu Abschnitt 6	619
VI	Laplace-Transformationen	620
1	Grundbegriffe	620
1.1	Ein einführendes Beispiel	620
1.2	Definition der Laplace-Transformierten einer Funktion	623
1.3	Inverse Laplace-Transformation	628
2	Eigenschaften der Laplace-Transformation (Transformationsätze)	629
2.1	Linearitätssatz (Satz über Linearkombinationen)	630
2.2	Ähnlichkeitssatz	631
2.3	Verschiebungssätze	632
2.3.1	Erster Verschiebungssatz (Verschiebung nach rechts)	632
2.3.2	Zweiter Verschiebungssatz (Verschiebung nach links)	635

2.4 Dämpfungssatz	637
2.5 Ableitungssätze (Differentiationssätze)	638
2.5.1 Ableitungssatz für die Originalfunktion	638
2.5.2 Ableitungssatz für die Bildfunktion	641
2.6 Integrationssätze	643
2.6.1 Integrationssatz für die Originalfunktion	643
2.6.2 Integrationssatz für die Bildfunktion	645
2.7 Faltungssatz	646
2.8 Grenzwertsätze	649
2.9 Zusammenfassung der Rechenregeln (Transformationssätze)	653
3 Laplace-Transformierte einer periodischen Funktion	654
4 Rücktransformation aus dem Bildbereich in den Originalbereich	658
4.1 Allgemeine Hinweise zur Rücktransformation	658
4.2 Tabelle spezieller Laplace-Transformationen	661
5 Anwendungen der Laplace-Transformation	664
5.1 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	664
5.1.1 Allgemeines Lösungsverfahren mit Hilfe der Laplace-Transformation	664
5.1.2 Integration einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	665
5.1.3 Integration einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	667
5.2 Einfache Beispiele aus Physik und Technik	670
5.2.1 Entladung eines Kondensators über einen ohmschen Widerstand	670
5.2.2 Zeitverhalten eines PT_1 -Regelkreisgliedes	672
5.2.3 Harmonische Schwingung einer Blattfeder in einem beschleunigten System	673
5.2.4 Elektrischer Reihenschwingkreis	675
5.2.5 Gekoppelte mechanische Schwingungen	678
Übungsaufgaben	680
Zu Abschnitt 1	680
Zu Abschnitt 2	681
Zu Abschnitt 3	684
Zu Abschnitt 4	685
Zu Abschnitt 5	686

Anhang: Lösungen der Übungsaufgaben	689
I Lineare Algebra	689
Abschnitt 1	689
Abschnitt 2	689
Abschnitt 3	691
Abschnitt 4	693
Abschnitt 5	697
Abschnitt 6	704
Abschnitt 7	707
II Fourier-Reihen	716
Abschnitt 1	716
Abschnitt 2	718
III Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen	723
Abschnitt 1	723
Abschnitt 2	724
Abschnitt 3	733
IV Gewöhnliche Differentialgleichungen	746
Abschnitt 1	746
Abschnitt 2	746
Abschnitt 3	755
Abschnitt 4	760
Abschnitt 5	766
Abschnitt 6	771
Abschnitt 7	772
V Fourier-Transformationen	778
Abschnitt 1	778
Abschnitt 2	780
Abschnitt 3	784
Abschnitt 4	786
Abschnitt 5	791
Abschnitt 6	792
VI Laplace-Transformationen	795
Abschnitt 1	795
Abschnitt 2	796
Abschnitt 3	801
Abschnitt 4	802
Abschnitt 5	803
Literaturhinweise	813
Sachwortverzeichnis	814